全微分可能の証明

定理

$R^n \to R$ の関数 Ψ が各変数について偏微分可能で、連続な偏導関数を持つとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ があって、$\|\Delta\boldsymbol{x}\| < \delta$（かつ $\|\Delta\boldsymbol{x}\| \neq 0$）ならば、

$$\left| \Psi(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) - \Psi(\boldsymbol{x}) - \sum_{1\le j\le n} \frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\Delta x_j \right| < \varepsilon\|\Delta\boldsymbol{x}\|$$

が成り立つ。

証明

まず、

$$\Psi(\boldsymbol{x}+\Delta_j\boldsymbol{x}) \equiv \Psi(x_1,\cdots,x_{j-1},x_j+\Delta x_j,\cdots,x_n+\Delta x_n) \qquad (1 \le \forall j \le n)$$

$$\Psi(\boldsymbol{x}+\Delta_{n+1}\boldsymbol{x}) \equiv \Psi(\boldsymbol{x})$$

と置く。すると、

$$\Psi(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) - \Psi(\boldsymbol{x}) = \sum_{1\le j\le n}\Big[\Psi(\boldsymbol{x}+\Delta_j\boldsymbol{x}) - \Psi(\boldsymbol{x}+\Delta_{j+1}\boldsymbol{x})\Big]$$

となる。また、Ψ が各変数で偏微分可能であることより、任意の $\varepsilon' > 0$ に対し、ある $\delta_1 > 0$ があって、$|\Delta x_j| < \delta_1$（かつ $\Delta x_j \neq 0$）ならば、

$$\left| \frac{\Psi(\boldsymbol{x}+\Delta_j\boldsymbol{x}) - \Psi(\boldsymbol{x}+\Delta_{j+1}\boldsymbol{x})}{\Delta x_j} - \left.\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\Delta_{j+1}\boldsymbol{x}} \right| < \varepsilon' \qquad (1 \le \forall j \le n)$$

が成り立つ。また、各偏導関数が連続であることより、ある $\delta_2 > 0$ があって、$\|\Delta_{j+1}\boldsymbol{x}\| < \delta_2$ ならば、

$$\left| \left.\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\Delta_{j+1}\boldsymbol{x}} - \frac{\partial\Psi}{\partial x_j} \right| < \varepsilon' \qquad (1 \le \forall j \le n)$$

よって、$\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$ とすれば $\|\Delta\boldsymbol{x}\| < \delta$（かつ全ての $1 \le j \le n$ に対して $\Delta x_j \neq 0$）のとき上の式は両方成り立つ。よって、このとき、

$$
\begin{aligned}
&\left|\Psi(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})-\Psi(\boldsymbol{x})-\sum_{1\le j\le n}\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\Delta x_j\right| \\
=\;&\left|\sum_{1\le j\le n}\Big[\Psi(\boldsymbol{x}+\Delta_j\boldsymbol{x})-\Psi(\boldsymbol{x}+\Delta_{j+1}\boldsymbol{x})\Big]-\sum_{1\le j\le n}\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\Delta x_j\right| \\
\le\;&\sum_{1\le j\le n}\left|\Psi(\boldsymbol{x}+\Delta_j\boldsymbol{x})-\Psi(\boldsymbol{x}+\Delta_{j+1}\boldsymbol{x})-\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\Delta x_j\right| \\
\le\;&\sum_{1\le j\le n}\left|\Psi(\boldsymbol{x}+\Delta_j\boldsymbol{x})-\Psi(\boldsymbol{x}+\Delta_{j+1}\boldsymbol{x})-\left.\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\Delta_{j+1}\boldsymbol{x}}\Delta x_j\right| \\
&+\sum_{1\le j\le n}\left|\left.\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\Delta_{j+1}\boldsymbol{x}}\Delta x_j-\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\Delta x_j\right| \\
=\;&\sum_{1\le j\le n}\left|\frac{\Psi(\boldsymbol{x}+\Delta_j\boldsymbol{x})-\Psi(\boldsymbol{x}+\Delta_{j+1}\boldsymbol{x})}{\Delta x_j}-\left.\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\Delta_{j+1}\boldsymbol{x}}\right||\Delta x_j| \\
&+\sum_{1\le j\le n}\left|\left.\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\Delta_{j+1}\boldsymbol{x}}-\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right||\Delta x_j| \\
<\;&\sum_{1\le j\le n}\varepsilon'|\Delta x_j|+\sum_{1\le j\le n}\varepsilon'|\Delta x_j| \\
\le\;&\sum_{1\le j\le n}2\varepsilon'\|\Delta\boldsymbol{x}\| \\
<\;&2n\varepsilon'\|\Delta\boldsymbol{x}\|
\end{aligned}
$$

よって、$\varepsilon=2n\varepsilon'$ とすれば、任意の $\varepsilon>0$ に対し、$\varepsilon'>0$ が充分小さくなるように、$\delta>0$ をとれば、$\|\Delta\boldsymbol{x}\|<\delta$（かつ全ての $1\le j\le n$ に対して $\Delta x_j\ne 0$）の場合、

$$
\left|\Psi(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})-\Psi(\boldsymbol{x})-\sum_{1\le j\le n}\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\Delta x_j\right|<\varepsilon\|\Delta\boldsymbol{x}\|
$$

が成り立つことが分かる。一方、幾つか（全てではない）の Δx_j が 0 の場合、左辺が 0 になる項が現れるだけなので、上の式は同様に成り立つ。よって、定理が成り立つことが証明された。□